# I PROBLEMI DI COSTRUZIONE GEOMETRICA CON L'AIUTO DI CABRI

SUMMARY

*Construction problems play an important role in the transition to proof, as far as their theoretical nature is concerned. In this paper we discuss the results of our ongoing research about students' approach to proofs through construction problems; this construction activity involves the use of the microworld Cabri-Géomètre, which helps pupils to find the correct sequence of menu commands to produce a figure that can be validated through the dragging test, as well as in the traditional paper and pencil environment, in which the right procedure must find a mathematical justification.*

FERDINANDO ARZARELLO, FEDERICA OLIVERO, DOMINGO PAOLA, ORNELLA ROBUTTI

# I PROBLEMI DI COSTRUZIONE GEOMETRICA CON L'AIUTO DI CABRI

FERDINANDO ARZARELLO*, FEDERICA OLIVERO*, DOMINGO PAOLA**,
ORNELLA ROBUTTI*

## 1. I PROBLEMI DI COSTRUZIONE

* DIPARTIMENTO DI MATEMATICA UNIVERSITÀ DI TORINO

** GREMG – DIPARTIMENTO DI MATEMATICA UNIVERSITÀ DI GENOVA

Come viene detto in Brigaglia (1993), gli *Elementi* di Euclide sono centrati sullo sviluppo della capacità di costruire oggetti geometrici che godono di determinate proprietà, utilizzando strumenti ben definiti. Negli *Elementi* troviamo i teoremi, ossia le proposizioni che devono essere verificate mediante dimostrazioni, e le costruzioni o problemi, ossia le procedure che portano a costruire oggetti che godono di determinate proprietà, utilizzando la riga non graduata e il compasso. Tre dei cinque postulati affermano la possibilità di effettuare costruzioni particolari: dati due punti tracciare il segmento che li congiunge; prolungare un segmento dato; dato un centro e un raggio tracciare una circonferenza. In un certo senso, questi postulati stabiliscono l'esistenza della riga non graduata e del compasso, ovvero di quegli strumenti che verranno utilizzati per effettuare costruzioni. Sotto questo aspetto, ogni costruzione con riga e compasso equivale, in ultima analisi, a una dimostrazione dell’esistenza dell'oggetto costruito a partire dai postulati di Euclide. Sempre da questo punto di vista possiamo dire che dietro a ogni costruzione c'è un teorema di geometria: al di là di ogni sua possibile realizzazione concreta, che può essere ottenuta utilizzando gli strumenti tecnici disponibili, una costruzione geometrica incorpora sempre anche un significato teorico. Come fa notare Mariotti (1996), nonostante riga e compasso siano strumenti obsoleti dal punto di vista pratico, il loro valore teorico è ancora intatto: si tratta del valore indotto dai vincoli di risolvere un problema dato con strumenti ben precisati. Ciò porta al bisogno di porsi domande del tipo 'che cosa posso fare

con questi strumenti?', ma, anche e soprattutto, domande del tipo 'che cosa non posso fare con questi strumenti?'. La difficoltà di rispondere a domande del secondo tipo è di ordine superiore, perché una risposta richiede una conoscenza accurata e profonda dei limiti e delle potenzialità di quegli strumenti.
Si può pensare per esempio ai classici 'problemi impossibili', come quelli della duplicazione del cubo o della trisezione dell'angolo. Da un punto di vista pratico, l'irresolubilità con riga e compasso di questi problemi non è chiara: di fatto è possibile dare soluzioni grafiche con un valore di approssimazione che supera ogni possibile verifica empirica. L'importanza di tali problemi nella storia della geometria sta nella loro irresolubilità teorica all'interno di un dato sistema di regole, corrispondenti all'uso teorico di determinati strumenti.

## 2.COSTRUZIONI E DIMOSTRAZIONI

Queste considerazioni suggeriscono che i problemi di costruzione geometrica siano un'ottima palestra per preparare lo studente all'attività dimostrativa. Se ciò corrisponde a realtà, la scelta di assegnare, nella prassi didattica, ai problemi di costruzione un ruolo sempre più marginale rispetto a quello che avevano fino a qualche tempo fa, potrebbe rivelarsi controproducente in percorsi che prendano in seria considerazione l'attività dimostrativa.
Pensiamo che, per gli insegnanti, sia un'esperienza comune constatare che di fronte ai primi teoremi della geometria e alla richiesta di fornire una dimostrazione, i ragazzi incontrino

difficoltà e spesso non comprendano il senso di ciò che viene loro richiesto. In genere gli studenti non sentono la necessità di fornire dimostrazioni. Alibert e Thomas (1991) suggeriscono che ciò possa anche dipendere dal fatto che le dimostrazioni sono presentate come un prodotto finito: lo studente non partecipa alla costruzione delle conoscenze che gli vengono proposte. Essi sottolineano che esiste “un conflitto tra l'attività dei matematici da una parte e i loro metodi di insegnamento dall'altra, il quale provoca problemi negli allievi”. Usiskin (1982) afferma che l'idea che gli studenti si fanno della dimostrazione a scuola è distorta: in particolare perché il lavoro del matematico non concerne solo la ricerca di dimostrazioni di enunciati già stabiliti, ma anche la congettura e la scoperta di nuove proprietà, e sicuramente non di proposizioni ovvie, come spesso viene richiesto a scuola.

La frattura che si determina tra esplorazione-congettura e dimostrazione ha pesanti conseguenze didattiche e cognitive.

Nell'attività di sperimentazione che stiamo conducendo da due anni con classi di liceo scientifico sperimentale, abbiamo perseguito con un certo successo una via che sottolinea la continuità tra i due momenti, seguendo l’impostazione dell’unità cognitiva che essi possono rappresentare per l’allievo (Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997). A tal fine risultano utilizzabili i problemi di costruzione geometrica perché riteniamo, con Mariotti (1996), che “il problema della costruzione costituisca un buon contesto per introdurre gli allievi alla geometria come sistema teorico” e perché siamo convinti che l'affrontare problemi di costruzione consenta la nascita del bisogno intellettuale di validare le procedure di costruzione e, quindi, la nascita di motivazioni all'attività dimostrativa.

## 3. I PROBLEMI DI COSTRUZIONE E IL SOFTWARE CABRI

Abbiamo scelto di utilizzare, quale ambiente iniziale per la risoluzione dei problemi di costruzione, il software Cabri-géomètre (Laborde & Laborde, 1992; Laborde & Capponi, 1994; Laborde, 1995; Boieri, 1996).
Rispetto all'ambiente 'carta e matita', la potenzialità di Cabri più rilevante dal punto di vista didattico consiste nella funzione di trascinamento (o dragging), ovvero nella possibilità di manipolare dinamicamente e direttamente sullo schermo le figure geometriche costruite. Il problema più delicato consiste nell'insegnare a usare Cabri in modo tale che non solo l'aspetto figurale, ma anche quello concettuale (Fishbein, 1993; Fischbein & Mariotti, 1997) sia ben presente agli studenti nel momento in cui disegnano una figura o la sottopongono a dragging.
Introdurre a scuola la geometria euclidea con l'aiuto di Cabri, integrandolo con i classici strumenti didattici (come l'ambiente carta e matita), può essere utile agli studenti per rendere via via esplicita la teoria entro cui le conoscenze usate si situano.
Lo schema in Figura 1 rappresenta uno dei modi possibili in cui può avere luogo l'interazione tra Cabri e carta e matita nella risoluzione di problemi di costruzione.
L'ambiente Cabri favorisce attività di esplorazione e di ricerca sul disegno che portano alla scoperta della procedura di costruzione

dell'oggetto geometrico richiesto dal problema, partendo dall'analisi del testo, cioè considerando le condizioni che legano dati e incognite (Figura 1: primo ramo, da sinistra). La costruzione, mediante i comandi del menu, dell'oggetto richiesto porta alla validazione in Cabri della procedura stessa attraverso il dragging test[1] (secondo ramo). A questo punto, per capire perché la procedura 'funziona', occorre dare una giustificazione di tutti i suoi passaggi nell'ambito di una teoria di riferimento; in altri termini si deve trovare una dimostrazione del teorema che assicura che, sotto le ipotesi date, la procedura porta effettivamente all'oggetto costruito. A partire da quest'ultimo (tesi) può essere utile fare l'analisi del problema (Panza, 1996), ovvero rileggere i passi della procedura esplicitando la teoria entro la quale si collocano. Risalendo all'indietro si arriva alla determinazione delle ipotesi, perciò alla formulazione di un enunciato, che è il teorema corrispondente alla costruzione effettuata in Cabri (terzo ramo). Rileggendo al contrario la giustificazione precedente, si giunge alla dimostrazione sintetica nell'ambito della geometria del teorema così costruito (quarto ramo). La riorganizzazione dei vari passi in forma logica comporta un cambiamento di punto di vista, attraverso il quale i pezzi della dimostrazione vengono riformulati in forma condizionale e concatenati in un'unica deduzione.

[1] Dragging test (o prova del trascinamento): se, trascinando uno o più elementi della figura, essa mantiene le proprietà geometriche che le attribuivamo, allora la costruzione supera il test (Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola, & Robutti, 1998).

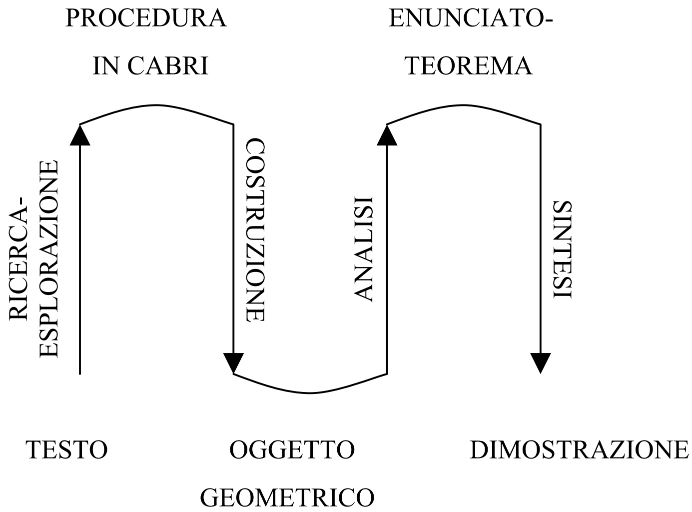



**Figura 1**

## 4. DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ SPERIMENTALE

In questa nota descriviamo l'approccio ai problemi di costruzione di studenti del biennio di un liceo scientifico (sperimentazione P.N.I.), con l'aiuto del software didattico Cabri-Géomètre[2].

[2] La versione I, non ancora la II per non avere a disposizione trasformazioni, luoghi, .. ma un software con un menu povero, perché sembra essere migliore per la didattica. Infatti è tecnicamente più semplice da imparare e costringe gli studenti a riferirsi ad un unico dominio di conoscenza (la geometria euclidea),

Ricordiamo che questo, per quanto importante, è solo uno degli aspetti del nostro progetto di ricerca, su cui abbiamo riferito in Arzarello, Olivero, Paola & Robutti (in stampa).

L'attività di ogni proposta di lavoro si articola in quattro fasi diverse:

1. lavoro a gruppi in Cabri e compilazione di una scheda sulla proposta di lavoro, che richiede di fornire una procedura per ottenere un disegno: 1 ora
2. discussione in classe[3] sui vari procedimenti di costruzione (corretti e non): circa 1 ora
3. discussione in classe sulla validità matematica della costruzione: circa 1 ora
4. dimostrazione (a casa).

Nella prima fase gli studenti, suddivisi in gruppi di due o tre, devono analizzare il testo della proposta di lavoro, scrivendo quali sono i dati, l'incognita e le relazioni che legano tra di loro i dati e l'incognita (Polya, 1957). Questo è un momento importante perché gli studenti spesso non leggono attentamente il testo di una prova di matematica, incorrendo successivamente in errori vari. Dopo l'analisi del testo utilizzano Cabri per costruire la figura richiesta. Durante l'attività l'insegnante passa da un gruppo all'altro, aiutando i ragazzi che si trovano bloccati nella risoluzione della proposta di lavoro. Egli non suggerisce né risolve il problema al posto degli studenti, bensì pone domande opportune, in modo che siano gli

---

avendo poche primitive.

[3] Si segue la metodologia della discussione in classe orchestrata dall'insegnante descritta in Bartolini Bussi, Boni & Ferri (1995).

stessi allievi a trovare le risposte ai loro dubbi. Il suo ruolo è quello di suggeritore/stimolatore della discussione tra i membri del gruppo. Nella scheda gli studenti riportano infine la procedura di costruzione, elencando i comandi di Cabri utilizzati. In questa fase, sfruttando il dragging test, possono constatare che la costruzione è corretta, se supera il test; in caso contrario, possono modificarla finchè non corrisponde alle richieste del problema. Ciò che viene validato, dunque, non è il disegno in sé, ma la procedura di costruzione, e in questa attività il ruolo di Cabri è fondamentale, perché il software fornisce, attraverso la prova del trascinamento, una prima risposta sulla correttezza del procedimento. E’ chiaro che, dal punto di vista teorico, questa prova non è sufficiente, per cui occorre validare ‘matematicamente’ la costruzione. In questo è cruciale il ruolo di mediatore dell’insegnante, che fa emergere negli studenti, con un processo che dura nel tempo, il senso della necessità di una giustificazione teorica delle loro costruzioni.
Ciò si realizza nella seconda fase: gli studenti discutono sui vari procedimenti di costruzione, sia quelli corretti che quelli errati, con il coordinamento di un esperto (nel protocollo descritto qui di seguito, Arzarello). E’ significativo il fatto che gli studenti stessi sentano l’esigenza di spiegare i tentativi non corretti e il modo in cui si sono accorti dell’errore durante il lavoro di gruppo. Il fatto che l'esperto sia un soggetto esterno alla classe non è necessario: anche l’insegnante può avere questo ruolo. Il vantaggio di far condurre la discussione da una persona che non sia l'insegnante consiste principalmente nel creare maggiore attenzione da parte degli studenti per il lavoro che stanno facendo. Abbiamo constatato

che essi sentono di essere al centro dell'attenzione non solo da parte del loro insegnante, ma anche di istituzioni alle quali danno particolare credito (nel nostro caso l'Università) e quindi partecipano in modo particolarmente attivo.

La seconda parte della discussione, che costituisce la terza fase ed è la più significativa, è dedicata alla giustificazione della correttezza della procedura: è un momento che, almeno all'inizio della sperimentazione, viene gestito collettivamente, perché è particolarmente difficile e delicato. Guidando i ragazzi a spiegare perché una costruzione 'funziona', si coglie l'occasione per spiegare loro un metodo di lavoro, l'analisi, che li aiuta ad esplicitare quelle ipotesi, quegli assiomi o quei teoremi che occorrono per motivare il risultato di una costruzione geometrica. In questo modo la dimostrazione viene 'costruita' (Polya, 1971) dai ragazzi, mettendo insieme i 'pezzi' già trovati durante la costruzione geometrica della figura in Cabri. Al termine i ragazzi dovrebbero arrivare a capire che la loro costruzione 'funziona' in Cabri proprio perché è giustificata da un teorema della geometria euclidea. Anche in questa fase, la discussione è orchestrata dall'esperto (o dall'insegnante).

Durante il lavoro in Cabri una persona osserva un gruppo, scrivendo i dialoghi dei ragazzi e le azioni che compiono, mentre durante la discussione registra i vari interventi.

Nell'ultima fase, quella della dimostrazione, gli studenti utilizzano il lavoro svolto durante le fasi precedenti e riorganizzano la procedura di costruzione pervenendo alla formulazione di un enuciato scritto in forma condizionale, dove sono esplicite le ipotesi e la tesi e dal quale partono per effettuare l'attività dimostrativa. Le dimostrazioni sono redatte a casa e in seguito raccolte dall'insegnante.

## 5. ANALISI DI UN PROTOCOLLO

Il programma di geometria affrontato nel primo anno ha già toccato le circonferenze e le rette tangenti; a questo punto del secondo anno l'insegnante non ha richiamato gli argomenti affrontati l'anno precedente, perché vuole che gli studenti riorganizzino le loro conoscenze tramite il percorso attraverso la geometria con l'utilizzo di Cabri. In questo modo, si esce dal tradizionale contratto didattico di spiegazione-studio-esercizio, per scoprire nuove proprietà, riscoprire proprietà già studiate e riutilizzarle, o dimostrare enunciati, secondo la continuità cognitiva sopra discussa.
Presentiamo qui di seguito l'analisi di un protocollo: le parole degli studenti e dell'insegnante compaiono in corsivo, mentre i commenti in tondo.

CIRCONFERENZE E RETTE TANGENTI

*Situazione*
Sia data una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t.
*Proposta di lavoro*
Costruisci la circonferenza che passa per P e Q ed è tangente a t in P.
Quali sono i dati del problema? Qual è l'incognita?
Quali sono le condizioni che legano tra loro i dati e l'incognita?
Dopo avere completato la costruzione in Cabri scrivi in modo preciso procedura che hai usato per la costruzione.

FASE 1.

Gli studenti affrontano inizialmente l'analisi del testo e trovano difficoltà nel rispondere alla seconda domanda.

GIADA- *Ma qui non c'è l'incognita.*

Poi passano alla costruzione in Cabri. Disegnano una retta per due punti (t), chiamano uno di questi due punti P, segnano un punto Q esterno a t, Giada rilegge il testo a voce alta, poi costruisce la circonferenza di centro Q e raggio QP.

GIADA- *Deve essere tangente solo in P?*

Sposta la retta in modo da farla diventare tangente alla circonferenza costruita; poi mette la retta orizzontale e sposta Q in modo che la circonferenza diventi tangente a t (Figura2).

ALBERTO- *Finito*.

L'insegnante prova a muovere la retta e si vede che la circonferenza non è più tangente.

ALBERTO- *Così non passa per Q!*

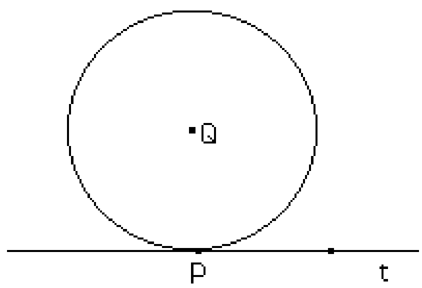



**Figura 2**

I ragazzi trovano difficoltà inizialmente nella compilazione della scheda, in particolare nel determinare qual è l'incognita, forse perché non conoscono il significato del termine in questo contesto (in genere il contratto didattico 'impone' che incognita sia una lettera e non il prodotto di una costruzione geometrica) ed inoltre solitamente le costruzioni sono riservate all'ambito del disegno tecnico, in cui si dà rilievo solo al ‘procedimento di costruzione’, senza sottolineare il rapporto tra l’oggetto da costruire e la teoria di riferimento. Iniziano il lavoro col calcolatore prima di avere compilato la prima parte della scheda: per esempio non scrivono le condizioni cui deve soddisfare l’incognita. L’analisi del testo è sempre la parte che crea più problemi.

In questa fase viene effettuata una costruzione errata: essa non si configura nemmeno come una procedura che possa produrre come oggetto finale l’incognita del problema.

Dopo aver constatato che la loro costruzione non funziona, i ragazzi rileggono più attentamente il testo e fanno una seconda costruzione[4]. Anche questa non regge al dragging test, nonostante sia corretta a prima vista, perché contiene tutti gli elementi del problema al loro posto. La costruzione non funziona perché tutto avviene solo a livello percettivo e figurale, ‘a occhio’. Gli oggetti disegnati vengono spostati in modo tale che la figura finale sembri quella giusta; a questo punto si considera il problema risolto e addirittura troppo facile: non c’è l’idea di una vera costruzione. In ambiente carta e matita questo disegno apparirebbe corretto, anche se per costruirlo non sono state usate proprietà teoriche. In Cabri,

---

[4] Creano subito il centro C della circonferenza e poi spostano Q in modo che la sua distanza da C sia uguale alla distanza di P (punto sulla retta t) da C. Usano il trasporto del segmento per creare QC=PC: ciò significa che hanno selezionato tra le loro conoscenze quella opportuna, cioè ora sanno che devono trovare un punto (il centro della circonferenza) tale che la sua distanza da P e da Q sia la stessa.

grazie al dragging test, è più facile far percepire ai ragazzi che la costruzione corretta è solo quella che si basa su una procedura corretta anche a livello teorico**.**

<u>FASE 2.</u>

GIADA- *Possiamo usare l'asse …l'asse di P …ma l'asse è di un segmento …*

Non riescono a concludere.

INSEGNANTE- *Cercate di usare bene Cabri. A che cosa vi serve?* V*i aiuta a scoprire. Voi dovete costruire una circonferenza che soddisfa a due condizioni; provate a costruirne una che soddisfi ad una sola delle due condizioni, poi muovetela in modo che risulti soddisfatta anche la seconda condizione.*

Segnano un punto esterno a t, creano la circonferenza di centro questo punto e passante per Q, e la fanno diventare tangente a t in P muovendo il centro.

INSEGNANTE- *Cercate di capire che cosa ha di particolare rispetto a tutte le altre che non sono tangenti a t in P.*

Guardano la figura senza aggiungere altri elementi; poi segnano il raggio in P e viene loro in mente che tale raggio è perpendicolare a t (Figura3). Così scoprono una condizione a cui deve soddisfare il centro C della circonferenza: C deve appartenere alla perpendicolare a t in P.

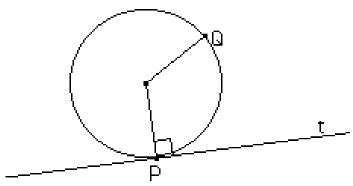
Fanno un nuovo disegno, creando: una retta per due punti, il punto P su di essa, il punto Q, la perpendicolare a t in P, il punto C sulla perpendicolare, la circonferenza di centro C e passante per P. Muovono il centro C (sollecitati dall'insegnante) e confrontano le distanze CP e CQ, senza le misure (Figura4).

ALBERTO- *CP e CQ devono essere uguali. Dobbiamo avere un triangolo isoscele.*

INSEGNANTE- *Che cosa ha di particolare un triangolo isoscele?*

GIADA- *Angoli alla base uguali, lati obliqui uguali, …l'altezza è bisettrice […] Dobbiamo trovare un punto che abbia la stessa distanza da P e da Q.*

[…] A Giada viene di nuovo in mente l'asse del segmento.



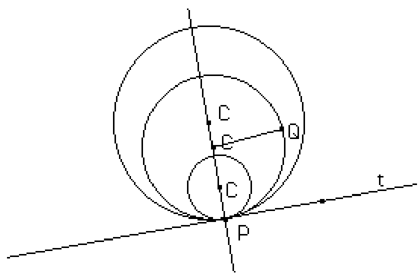




**Figura 3** **Figura 4**

Dato che i ragazzi non riescono a costruire una circonferenza che soddisfi entrambe le condizioni del problema, l'insegnante suggerisce che è possibile costruire un oggetto che ne rispetti una, tralasciando provvisoriamente l'altra (è uno dei metodi euristici descritti da Polya, 1957). Per far sì che la circonferenza soddisfi anche la seconda condizione, si può usare il trascinamento ed esplorare la situazione, cercando nell'ambito delle proprie conoscenze, quella che può essere utilizzata in questo specifico caso. Si tratta di un'esplorazione all'interno di un problema di costruzione: infatti, i due tipi di problemi (costruzione ed esplorazione) non sono separati (Olivero, Paola & Robutti, 1998).
I ragazzi costruiscono allora una circonferenza per Q e la fanno quindi diventare tangente in P muovendone il centro. Tracciando il raggio in P scelgono tra le loro conoscenze teoriche quella che ritengono possa essere usata nel particolare contesto: si ricordano che il raggio deve essere perpendicolare alla retta t nel punto di tangenza; quindi fanno una nuova costruzione. Ora la circonferenza soddisfa solo la condizione di tangenza, cioè ha il centro sulla

perpendicolare e passa per P, punto di t. A questo punto ha luogo una nuova esplorazione per capire qual è l'altra condizione da aggiungere: quando tale circonferenza passa per Q? Muovono il centro C sulla retta perpendicolare appena costruita, osservando la relazione tra i segmenti PC e QC: mediante un ragionamento trasformazionale (Simon, 1996) notano che quando si ha il passaggio per Q essi sono uguali mentre prima e dopo sono diversi. A questo punto i ragazzi formulano un'ipotesi di lavoro 'sotto' la quale pensano di doversi muovere *(dobbiamo avere un triangolo isoscele)* e la precisano quindi in forma operativa *(dobbiamo trovare un punto che abbia la stessa distanza da P e da Q).* La difficoltà incontrata adesso riguarda il modo di costruire tale punto in Cabri, infatti non si accorgono di avere appena dato la definizione di asse del segmento. Quando anche questo ostacolo viene superato, sono stati individuati tutti gli elementi che permettono di costruire una figura soddisfacente le condizioni date.

FASE 3.

Rifanno la costruzione dall'inizio (Figura 5) e scrivono la procedura sulla scheda: retta per due punti (t), punto P su t (è uno dei due punti con cui hanno costruito t), punto esterno (Q), retta perpendicolare a t in P, segmento PQ, asse di QP, intersezione di due oggetti (asse e retta perpendicolare), circonferenza centro/punto (centro C, punto Q).

Provano a spostare la retta: funziona, supera il dragging test.

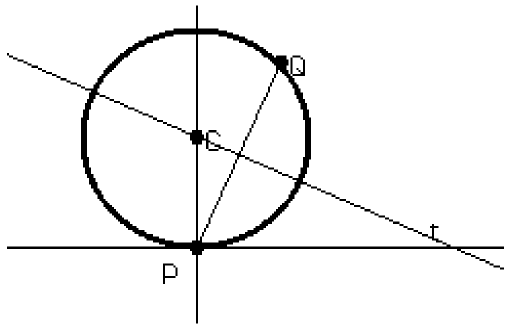



**Figura 5**

Il lavoro procede velocemente, alla luce dell'esperienza e dei tentativi precedenti. Qui si ha una forma di 'distanziamento' dagli oggetti prodotti fino ad ora; un controllo di tipo discendente[5] determina ora la procedura per la costruzione vera e propria, che viene validata attraverso il dragging test.

## 6. DISCUSSIONE IN CLASSE

Quando tutti hanno terminato, ha inizio la fase di discussione sulle procedure. La presentazione avviene tramite proiezione sullo schermo della videata del computer, in modo che la classe possa

[5] E' la modalità che si ha quando il risolutore ha già prodotto una congettura nella forma 'se…allora'; ora usa le sue conoscenze per validarla e dimostrarla: è una 'discesa' dalla teoria al disegno (sia nel suo aspetto figurale che in quello concettuale), il quale diventa di nuovo un campo di esplorazione, questa volta non più per scoprire, bensì per validare (Olivero, Paola & Robutti, 1998).

vedere il lavoro in Cabri. La seconda parte della discussione ha luogo in classe perché è necessaria la lavagna.

FASE 1 (procedure).

Il primo gruppo fa vedere la costruzione corretta, poi a turno altri gruppi presentano i loro tentativi di costruzione, anche quelli che si sono poi rivelati sbagliati. A titolo di esempio riportiamo due costruzioni non corrette raccontate dai ragazzi.

Costruzione 1:

LUCA: *Noi avevamo costruito Q sulla perpendicolare per P a t, poi abbiamo preso il punto medio del segmento PQ come centro della circonferenza.*

*Ma questo non è giusto perché Q si può spostare solo su e giù e non a destra e sinistra.* […]

Costruzione 2:

PAOLO: *Noi abbiamo costruito una retta per due punti [t] e preso un punto Q esterno alla retta. Abbiamo segnato il punto medio del segmento PQ. Poi abbiamo costruito la circonferenza di centro il punto medio e passante per Q e abbiamo segnato l'intersezione di questa circonferenza con t. In questo modo si forma un triangolo; abbiamo preso il punto medio di un cateto del triangolo rettangolo e abbiamo disegnato la circonferenza di centro questo punto e passante per Q. Si è venuta a creare una semicirconferenza in cui abbiamo costruito un triangolo rettangolo, che ha un lato perpendicolare alla retta t. Abbiamo chiamato P l'intersezione del cateto con la retta t.*

ESPERTO*: Quindi avete cambiato punto P.*

PAOLO*: Sì ma è lo stesso; possiamo chiamare questo punto [il punto inizialmente chiamato P] A. Questo è uno dei punti con cui abbiamo creato la retta*.

ALFREDO*: Muovendo Q si muove anche P. Non si ha l'indipendenza della costruzione precedente. Qui Q si muove ma P si muove in modo che QP rimanga perpendicolare a t. P non dovrebbe stare fermo? [...]*

L'accento viene posto sui tentativi che poi si sono rivelati errati; è importante far scoprire agli studenti come ogni risultato, anche parzialmente errato, possa comunque essere stato motore della loro ricerca; essi apprendono così che è normale non 'trovare' immediatamente e che i tentativi hanno in ogni caso valore. In questa 'rottura' del contratto didattico standard è sempre cruciale la figura dell'insegnante, che provoca in tal modo l'evoluzione delle credenze e delle conoscenze degli allievi verso una concezione nuova di dimostrazione. Sono gli stessi ragazzi che spiegano perché hanno abbandonato una determinata costruzione: vengono dunque considerati i processi e non solo i prodotti. La costruzione 1 è un caso particolare, perché il punto Q si trova ad essere vincolato (un grado di libertà), mentre dovrebbe essere libero perché si tratta di un dato (due gradi di libertà).

La costruzione 2 sembra funzionare, ma in realtà risolve anch'essa un caso particolare: sono state cambiate le relazioni tra gli oggetti perché viene chiamato P il punto ottenuto al termine del processo. Uno studente si accorge subito di qualcosa di strano perché muovendo Q si muove anche P, mentre come dato iniziale P dovrebbe essere indipendente da Q.

<u>FASE 2 (dimostrazione).</u>

L'esperto ripete la costruzione corretta alla lavagna (Figura 5). Retta t, punto P su t, punto Q esterno a t.

ESPERTO: *Poi chiamate O questo punto [intersezione della perpendicolare a t in P con l'asse di PQ] e dicevate che questa circonferenza così costruita [di centro O e raggio OQ] è tangente a t in P e passante per Q. Questa è la conclusione a cui siamo arrivati. Perché? Non perché funziona in Cabri. Cerchiamo di capire perché questa costruzione funziona, in modo matematico.*

ALFREDO: *L'asse di PQ è la bisettrice dell'angolo QOP .... QM=MP [M punto medio di PQ]... quindi essendo l'asse la bisettrice sappiamo che ... Anche QM è perpendicolare all'asse e anche MP.*

ESPERTO: *Diamo un nome all'asse, chiamiamolo s. Quindi posso dire che C passa sia per P che per Q. Vediamo se è vero che posso concludere questo.*

ALFREDO: *QM = MP, QM perpendicolare a s, s è l'asse di PQ ed è la bisettrice di QOP. Se l'asse è la bisettrice ho un triangolo isoscele, quindi QO=OP.*

*Dunque c, la circonferenza di centro O e raggio r=OQ, passa per Q e P.*

ROBERTO: *Bisogna dire che O appartiene alla perpendicolare a t.*

ESPERTO: *Qualunque perpendicolare?*

ROBERTO: *Passante per P, altrimenti non si ha la tangente.*

ESPERTO: *Se ho queste due affermazioni:*

1. *O appartiene alla perpendicolare a t per P,*
2. *c passa per Q e P,*

*segue che c è tangente a t in P e passa per Q? Siete d'accordo? Accettando queste due affermazioni (non sto dicendo che sono vere, dopo le vediamo), implicano la conclusione c è tangente a t in P e c passa per Q?*

ROBERTO: *O deve essere l'intersezione tra l'asse e la perpendicolare.*

ESPERTO: *O è costruito così. Ma io vi ho chiesto se 1. e 2. sono sufficienti per avere questa affermazione.*

ALBERTO: *Per dimostrare che c è tangente a t in P.... OP è un raggio ed è perpendicolare a t, quindi sappiamo che c è tangente a t.*
ESPERTO: *Quindi posso dire la parte che riguarda la tangente in virtù di una proprietà nota.*
ESPERTO: *In virtù della definizione di tangente ho che OP perpendicolare a t & O P = r.*
ALBERTO: [perfeziona la definizione] *Deve essere OP = r =distanza di O dalla retta.*
ESPERTO: *Quindi voglio le due cose [OP perpendicolare a t & OP = r]. Quindi questa è la definizione di tangente e per definizione c è tangente a t in P. c passa per Q? .... Certamente! L'ho presa io in questo modo. Quindi in conclusione c è tangente a t in P e c passa per Q è conseguenza di: QO = r (e l'ho usato due volte) e QO = OP.*

In questa fase c'è un cambiamento di quadro. Si passa all'ambiente carta e matita e ci si chiede perché la costruzione funziona, cioè ci si preoccupa di giustificare la correttezza della procedura utilizzata in Cabri per arrivare a produrre il disegno. Il metodo utilizzato dall'esperto nel guidare la discussione con gli studenti ha come obiettivo l'analisi del problema di costruzione, ossia la ricerca della giustificazione del risultato nell'ambito di definizioni e teoremi. Si osserva infatti che l'esperto guida gli allievi dalla formulazione della tesi all'indietro fino alla scrittura delle ipotesi: in tal modo si perviene alla formulazione di un enunciato, che può essere successivamente dimostrato.

Vengono introdotti passo dopo passo gli elementi necessari alla giustificazione della procedura: perché la circonferenza così ottenuta, di centro O e raggio OQ, passa per Q ed è tangente a t in P?

Sfruttando gli interventi degli studenti *(OP è un raggio ed è perpendicolare a t)* l'esperto li conduce a sfruttare la definizione di tangente per giustificare che il centro della circonferenza deve appartenere alla perpendicolare a t in P.

ESPERTO: *QO = OP perché?*

ALBERTO: *QOP è un triangolo isoscele. OM è bisettrice. s che è l'asse è un luogo di punti.*

ESPERTO: *L'asse è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q. E questa è un'altra costruzione, dipende da come ho definito s; questa è la definizione di asse. Quindi O appartiene alla perpendicolare a t per P, ma O appartiene anche all'asse s. Perché? Per come l'ho costruito, l'ho costruito come intersezione di s con la perpendicolare. Quindi tutto è basato sulla costruzione di O.*

Analogamente a quanto fatto in precedenza, l'esperto guida gli studenti a sfruttare la definizione di asse di un segmento per giustificare che QO = OP.

ESPERTO: *In realtà allora ho due costruzioni: a) Costruzione di O: O è l'intersezione di s con la perpendicolare a t in P; b) Costruzione di s: s è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q. Queste sono sufficienti per dimostrare cosa? - Primo, che O appartiene alla perpendicolare a t passante per P; certamente, perché O è intersezione…*

*- Secondo, che O appartiene a s; certo, per lo stesso motivo.*

*- Terzo, QO = OP; è conseguenza di b) e di quello che abbiamo detto sopra.*

*A questo punto metto insieme i vari ingredienti. Allora la dimostrazione prende come ipotesi a) e b) e via via giunge a farmi vedere che c è tangente a t in P e c passa per Q.*

Gli oggetti fondamentali risultano essere due costruzioni: quella dell'asse di PQ e quella di O come intersezione dell'asse con la perpendicolare a t in P. Queste diventano le ipotesi di un teorema, enunciato in modo completo nella parte finale della discussione. In Cabri si era partiti da una circonferenza soddisfacente le condizioni date e le due costruzioni menzionate sopra erano state un punto di arrivo. Adesso il grafo (Figura 6) mostra un percorso che parte da tali costruzioni e arriva alla circonferenza *c*, che diventa la tesi di una cosa che si può chiamare teorema o proprietà. Il grafo che risulta dalla dimostrazione 'all'indietro' è stato costruito a partire dal fondo, seguendo il metodo analitico, e le frecce sono state aggiunte solo alla fine per ricostruire la dimostrazione in modo sintetico.

ESPERTO: *Voi in Cabri avete fatto il contrario, avete pensato come doveva essere la circonferenza. Adesso questo diagramma* (Figura 6) *ci dà le relazioni logiche tra gli enunciati: partendo da a) e b) e usando le definizioni di retta tangente e luogo di punti siamo arrivati a dimostrare la conclusione nel rettangolo* (del grafo)*, che possiamo chiamare proprietà. Allora ho dimostrato questo teorema:*

*HP: 1. Dati una retta t, $P \in t$, $Q \notin t$; 2. Se s è l'asse di QP; 3. Se O appartiene a s e alla perpendicolare a t in P*

*TS: Allora la circonferenza di centro O e raggio uguale a OQ è tangente a t in P e passa per Q.*

*In Cabri avete fatto le due costruzioni che sono le ipotesi che vi servono per dimostrare.*

Ogni volta che fate una costruzione in Cabri è come se aveste un teorema, ma non avete la dimostrazione.

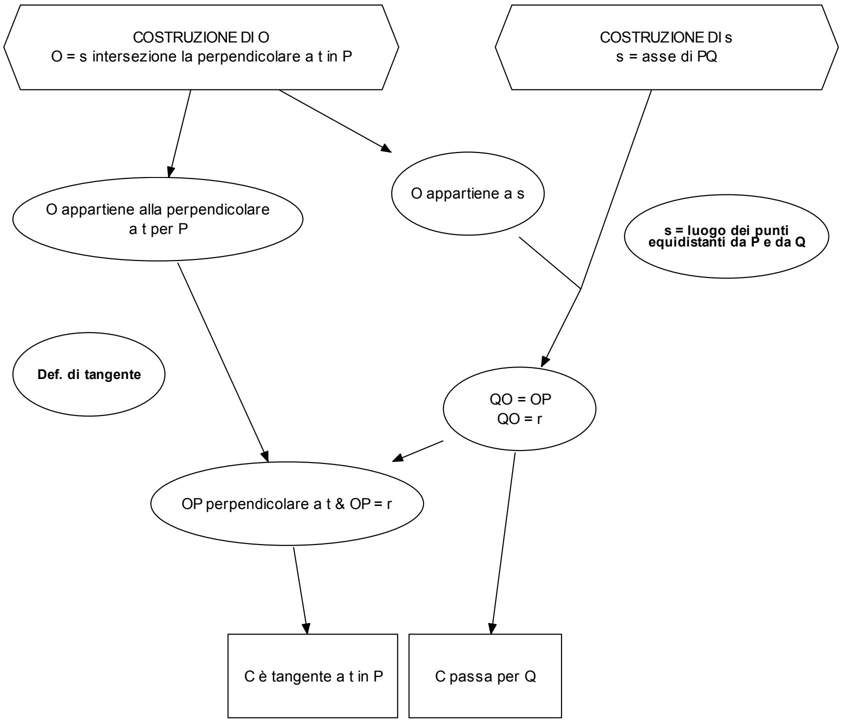



**Figura 6**

## 7. CONCLUSIONI

Come negli *Elementi* di Euclide sono possibili determinate costruzioni geometriche con gli strumenti riga e compasso, così in Cabri sono possibili determinate costruzioni con i comandi forniti dal menu, che si rifanno ad assiomi e proprietà della geometria euclidea. Gli studenti, utilizzando il software per ottenere figure richieste dai problemi di costruzione, lavorano ad un'attività quanto mai stimolante dal punto di vista culturale. La geometria euclidea, studiata con l'ausilio di un micromondo come Cabri, può veramente guadagnare l'immagine, agli occhi degli studenti, di sistema teorico, perché l'attività consiste nell'ottenere la costruzione di un oggetto geometrico (e non un semplice disegno a occhio) tramite una procedura, insieme alla giustificazione della validità della procedura stessa.

Il ruolo che lo studente ha, nell'attività descritta, è di partecipante attivo del processo di insegnamento/apprendimento, perché produce costruzioni e le dimostra (anziché studiare, molto spesso a memoria, dimostrazioni di cui non comprende l'esigenza).

Il ruolo dell'insegnante è altresì importante, sia nello stimolare le attività all'interno dei gruppi, che nel guidare la discussione successiva, per il confronto delle varie costruzioni e per la validazione di quelle corrette, attraverso la dimostrazione.

La dimostrazione diventa effettivamente, come dice Barbin (1988), un atto sociale che si realizza in un microcosmo, perché è costruita dagli studenti, con l'aiuto dell'insegnante, secondo regole e codici condivisi. Con il procedere di un'attività di questo tipo l'insegnante può limitare sempre di più i suoi interventi, limitandosi a guidare gli interventi dei ragazzi nella costruzione della dimostrazione finale.

Il ruolo di Cabri in un'attività di questo tipo è quello di mediatore dalla fase di costruzione (integrata da esplorazioni locali) a quella di dimostrazione, molto più potente di quanto potrebbe esserlo il classico ambiente carta e matita, perché aiuta gli studenti a:

- superare l'aspetto figurale per avvicinarsi a quello concettuale, tramite la possibilità, offerta dal dragging test, di vedere se una costruzione funziona (Provano a spostare la retta: funziona, supera il dragging test.);

- arrivare alla costruzione corretta dell'oggetto geometrico sfruttando una condizione alla volta, ed esplorando tramite il dragging per introdurre la condizione successiva (Segnano un punto esterno a t, creano la circonferenza di centro questo punto e passante per Q, e la fanno diventare tangente a t in P muovendo il centro. … *CP e CQ devono essere uguali. Dobbiamo avere un triangolo isoscele.*);
- comprendere che occorre far uso di proprietà o definizioni per costruire una figura, ossia che la costruzione geometrica ha un significato teorico *(Angoli alla base uguali, lati obliqui uguali, …l'altezza è bisettrice ... Dobbiamo trovare un punto che abbia la stessa distanza da P e da Q.* … A Giada viene di nuovo in mente l'asse del segmento.);
- rendersi conto che non è sufficiente aver costruito una figura che regge al dragging test per poter essere sicuri che la costruzione funziona matematicamente (quindi essere coscienti dei limiti del software a livello teorico) *(Ho capito che io uso Cabri grazie ai teoremi ma non li dimostro con esso. ... Cabri aiuta per intuire la soluzione ma non per la dimostrazione finale comprendente i teoremi studiati[6])*;

---

[6] Queste sono alcune delle risposte date dagli studenti ad un questionario distribuito al termine dell'attività, in cui era richiesto di valutare il tipo di lavoro svolto (in Cabri e durante la discussione), in particolare di determinare in che modo Cabri era stato loro utile.

- avere l'esigenza di dimostrare, nell'ambito della geometria, che una procedura di costruzione è corretta *(Per dimostrare che c è tangente a t in P.... OP è un raggio ed è perpendicolare a t, quindi sappiamo che c è tangente a t.)*.

## BIBLIOGRAFIA

Alibert, D. & Thomas, M.: 1991, Research on mathematical proof. In: D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publisher, 215-230.

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *PME XXII*.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: (in stampa), Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva., *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.*

Barbin, E.: 1988, *La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, *Quaderno di lavoro n.10A*, Centro di ricerche didattiche Ugo Morin, anche in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17B, 212-246; trad. it. con commento di 'La démostration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques', *Bulletin APMEP*, 366, 591-620.

Bartolini Bussi, M., Boni, M. & Ferri, F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena.

Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PMEXXI*, Lathi, v.1, 180-195.

Boieri, P. (a cura di): 1996, *Fare geometria con Cabri,* Centro ricerche didattiche Ugo Morin, Giovanni Battagin Editore.

Brigaglia, A.: 1993, Torniamo ad Euclide, *Lettera Pristem*, 10.

Euclide: *Gli Elementi*, a cura di P. Frajese Maccioni, UTET, 1977, Torino.

Fischbein, E.: 1993, The theory of figural concepts, *Educational studies in mathematics*, 24, 139-162.

Fischbein, E. & Mariotti, M.A.: 1997, Defining in classroom activities, *Educational studies in mathematics*, 34, 219-248.

Laborde, C & Capponi, B.: 1994, Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique, *Recherches en didactique des mathèmatiques*, vol. 14, 1.2, 165-210.

Laborde, C. & Laborde, J.M.: 1992, Problem Solving in Geometry: From Microworlds to Intelligent Computer Environments. In: *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*. Research in Contexts of Practice, NATO ASI Series, Series F, vol. 89.

Laborde, C.: 1995, Cabri-géomètre ou un nouveau rapport à la géométrie. In: Notiziario UMI XVII *Convegno sull'insegnamento della matematica: l'insegnamento della geometria*. Temi d'attualità, supplemento al n. 8-9, Anno XXII.

Mariotti, M.A.: 1996, Costruzioni in geometria: alcune riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B, 3, 261-287.

Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, *Dalla congettura alla dimostrazione*, Quaderni del Dipartimento di Matematica, Torino.

Panza, M.: 1996, Classical sources for the concepts of Analysis and Synthesis. In: M.Otte & M.Panza (Eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematics, History and Philosophy*, Dordrecht, Kluwer, 365-414.

Polya, G.: 1957, *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, New York, Doubleday.

Polya, G.: 1971, *La scoperta matematica*, Feltrinelli, Milano.

Simon, M.: 1996, Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing, *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.

Usiskin: 1982, Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, *Final report of the cognitive development and achievement in secondary school geometry Project*, University of Chicago, Department of Education.